SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

SOLUZIONI POSITIVE IN R^n PER EQUAZIONI DI TIPO CURVATURA MEDIA ASSEGNATA

2 MAGGIO 1985

Scopo di questo seminario è la presentazione di alcuni Teoremi di esistenza e di unicità per il problema

$$(M)\quad \begin{cases} M(u) + f(u) = 0 \text{ in } R^n \\ u(x) > 0 \ \forall x \in R^n, \quad u \in C^2(R^n), \\ u(x) \to 0 \text{ per } |x| \to +\infty \end{cases}$$

dove M è l'operatore delle superficie minime

$$M(u) = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right), \quad Du = \operatorname{grad} u ,$$

e $f: R \to R$ è una funzione localmente lipschitziana. I risultati che esporremo sono stati ottenuti insieme con B. Franchi e J. Serrin; essi estendono precedenti teoremi di Berestycki-Lions-Peletier e di Peletier-Serrin relativi al problema

$$(\Delta)\quad \begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \text{ in } R^n \\ u(x) > 0 \ \forall x \in R^n \\ u(x) \to 0 \text{ per } |x| \to +\infty \end{cases}$$

(Cfr. [BLP] e [PS]; Cfr. anche [L]).

I metodi variazionali solitamente usati per provare l'esistenza di soluzioni (deboli) del problema (Δ), non sembrano applicabili al caso (M). D'altra parte, poiché la non linearità di M è determinata dal termine $(1+|Du|^2)^{-1/2}$, dipendente solo da $|Du|$, una funzione a simme-

tria radiale $u(x) = u(|x|)$ risolve (M) se, e solo se, verifica

$$(*) \qquad \begin{cases} E(u')u'' + \frac{n-1}{r} A(u')u' + f(u) = 0 \\ u'(0) = 0 \ , \ u(r) > 0 \ \forall r \geq 0 \quad , \quad u \in C^2([0,+\infty[) \\ u(r) \to 0 \text{ per } r \to +\infty \ . \end{cases}$$

Abbiamo posto, per semplicità, di scrittura,

$$A(t) = (1+t^2)^{-1/2} \quad e \quad E(t) \equiv (tA(t))' = (1+t^2)^{-3/2}$$

Il nostro metodo per provare l'esistenza di una soluzione di (*) si ispira a quello utilizzato in [BLP] e consiste nel provare che esiste $\xi > 0$ tale che il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} E(u')u'' + \frac{n-1}{r} A(u')u' + f(u) = 0 \\ u'(0) = 0 \quad , \quad u(0) = \xi \end{cases}$$

ha una soluzione $u \equiv u(\xi,\cdot)$ di dominio l'intero intervallo $[0,+\infty[$, strettamente positiva e infinitesima all'infinito. Questo sarà provato nel § 3.

Nel § 4, con un procedimento analogo a quello impiegato in [PS], verrà provata l'unicità (a meno di una traslazione) delle soluzioni radiali di (M). Infine, nel § 5, estendendo precedenti risultati di [GNN] relativi al caso (Δ), proviamo che ogni soluzione di (M) è radialmente simmetrica rispetto ad un punto di R^n. Tutto ciò, purché f verifichi opportune ipotesi che verranno precisate di volta in volta.

Segnaliamo infine che i risultati da noi ottenuti valgono anche per equazioni più generali del tipo seguente

$$\operatorname{div}(A(|Du|)Du) + f(u) = 0$$

se A verifica

(A.1) $A > 0$ su $[0,+\infty[$, $A(0) = 1$,

(A.2) $E(t) = (tA(t))' > 0$ su $[0,+\infty[$,

(A.3) $t \to 1/(A(\sqrt{t}))^2$ è crescente e concava su $[0,+\infty[$.

In particolare (A.1), (A.2) e (A.3) valgono per l'operatore delle superficie minime "generalizzato"

$$\operatorname{div}((1+|Du|^2)^{-m/2}Du) \quad , \quad 0 \leq m \leq 1.$$

2. In questo numero studiamo alcune proprietà delle soluzioni dell'equazione

$$E(u')u'' + \frac{n-1}{r} A(u')u' + f(u) = 0 \tag{2.1}$$

Utilizzando il Teorema del punto fisso di Schauder, si può provare che il problema di Cauchy (P) ha una soluzione non prolungabile u (unica per la lipschitzianità di f) di classe $C^{(2)}$ su $[0,T_\xi[$, $T_\xi \leq +\infty$.

Posto

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds \ , \tag{2.2}$$

se $u \in C^{(2)}([r_1,r_2])$, $0 < r_1 \leq r_2$, è soluzione di (2.1), allora, moltiplicando (2.1) per u' e integrando su $[r_1,r_2]$, si ottiene

$$\int_{|u'(r_1)|}^{|u'(r_2)|} \rho E(\rho)d\rho + (n-1)\int_{r_1}^{r_2} A(u'(\rho))u'^2(\rho)\,\frac{d\rho}{\rho} = \tag{2.3}$$

$$= F(u(r_1)) - F(u(r_2))$$

Da questa identità, con ragionamenti simili a quelli del Lemma 3 di [PS], si trae che ogni soluzione u di (*) è strettamente decrescente con derivata infinitesima all'infinito. Inoltre

$$\int_0^{+\infty} A(u'(\rho))\, u'^2(\rho)\,\frac{d\rho}{\rho} = F(u(0)). \tag{2.4}$$

La seguente condizione è quindi *necessaria* affinché (*) abbia soluzione

$$\exists\delta > 0 : F(\delta) > 0. \tag{H.1}$$

Posto poi

$$\beta = \inf\{u > 0 ; F(u) > 0\}, \tag{2.5}$$

se u è soluzione di (*) e $n > 1$, allora $u(0) > \beta$. Un'altra condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione di (*) è la seguente:

$$\max_{[0,\beta]} |F| < 1 \equiv \int_0^{+\infty} \rho E(\rho)d\rho\ . \tag{2.5}$$

Infatti, se u è soluzione di (*), per la (2.3) si ha

$$F(u(o)) - F(u(r)) < (n-1) \int_0^{+\infty} A(u')u'^2 \frac{d\rho}{\rho} + \int_0^{+\infty} \rho E(\rho)d\rho$$

e quindi, per la (2.4),

$$-F(u(r)) < \int_0^{+\infty} \rho E(\rho)d\rho \qquad \forall r \geq 0.$$

Introduciamo ora alcune ipotesi su f.

(H.2) $\exists \alpha,\gamma > 0,\ \alpha < \beta < \gamma : f(\alpha) = f(\gamma) = 0,\ f(t) \neq 0$ se $0<t<\gamma,\ t \neq \alpha.$

(H3.) $F(\gamma) - F(\alpha) \equiv \max_{[0,\gamma]} F - \min_{[0,\gamma]} F > 1$

(Cfr. (2.5)).

<u>Proposizione 2.2.</u> Siano soddisfatte le ipotesi (H.1)-(H.3) e sia $u: [0, T_\xi[\to R$ la soluzione non prolungabile del problema (P) con $0 < \xi < \gamma$. Allora

i) $\exists R \in]0, T_\xi[: 0 = u(R) < u(r) \quad \forall r \in [0,R[,$

oppure

ii) $T_\xi = + \infty \quad$ e $\quad 0 < u(r) < \gamma \quad \forall r \geq 0.$

Se $0 < \xi \leq \beta$ vale ii)

<u>Dimostrazione</u>. In un intorno di 0 è $0 < u < \gamma$. Se non vale i) risulta $u(r) > 0$ $\forall r \in [0,T_\xi[$. Per la (2.3), con $r_1 = 0$ e $r_2 = r$, si ha $F(\xi) - F(u(r)) > 0$ $\forall r \in [0,T_\xi[$ e, quindi, $F(u(r)) < F(\gamma)$ $\forall r \in [0,T_\xi[$.

Pertanto $u(r) \neq \gamma$ $\forall r \in [0,T_\xi[$. Poiché $u(o) < \gamma$ ne viene che $u(r) < \gamma$ $\forall r \in [0,T_\xi[$.

D'altra parte, per la (2.3), per ogni $r > 0$ si ha

$$(2.6) \qquad \int_0^{|u'(r)|} \rho E(\rho)d\rho + (n-1) \int_0^r A(u')u'^2 \frac{d\rho}{\rho} = F(\xi) - F(u(r))$$

e, quindi,

$$\int_0^{\sup|u'|} \rho E(\rho)d\rho \leq \sup_{[0,\gamma]} F - \inf_{[0,\gamma]} f < \int_0^{+\infty} \rho E(\rho)d\rho$$

Ciò prova che $\sup_{[0,T_\xi[} |u'| < +\infty$. Di conseguenza $T_\xi = +\infty$.

Infine, se $\xi \leq \beta$ risulta $u(r) > 0$ $\forall r \geq 0$. Infatti, se fosse $u(r) = 0$ per un $r > 0$, si avrebbe

$$\int_0^{|u'(r)|} \rho E(\rho)d\rho \leq F(\xi) - F(u(r)) = F(\xi) \leq 0$$

e, quindi, $u'(r) = 0$. Per l'unicità della soluzione del problema (P) dovrebbe essere allora $u \equiv 0$.

<u>Proposizione 2.3.</u> Siano soddisfatte le ipotesi (H.1)-(H.3) e, di più la seguente

(H.4) $\qquad \exists f'(\alpha) > 0$.

Siano $0 < \xi < \gamma$ e $u = u(\xi,\cdot)$: $[0,T_\xi[\to R$ la soluzione non prolungabile di (P). Allora, se $T_\xi = +\infty$ e $u(r) > 0$ $\forall r \geq 0$, risulta

i) $\lim_{r\to+\infty} u(r) = 0$, oppure ii) se $n = 1$ u è periodica, se $n > 1$ u è oscillante, esiste cioè una successione di punti critici di u, $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < .. < r_k \uparrow +\infty$, tale che $u(r) < u(r_k)$ $\forall r > r_k$ se r_k è un punto di massimo relativo, $u(r) < u(r_k)$ $\forall r < r_k$ se r_k è un punto di minimo[1].

Dimostrazione. Se sgn u' è costante in un intorno di $+\infty$, u ha limite, necessariamente finito, per $r \to +\infty$. Dalla (2.6) si ricava allora che anche u' ha limite, necessariamente zero, per $r \to +\infty$. Per l'equazione (2.1) u" ha limite, necessariamente uguale a zero, per $r \to +\infty$. Ancora da (2.1) si ricava infine $f(\lim_{r\to+\infty} u(r)) = 0$. Allora $l \equiv \lim_{r\to+\infty} u(r) = \alpha$ oppure $l = 0$. Con ragionamenti analoghi a quelli di [BLP], utilizzando l'ipotesi (H.4), si prova che non può essere $l = \alpha$. In questo caso allora vale i). Se sgn u' non è costante in un intorno di $+\infty$, esiste una successione di punti critici di u, $r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_k \nearrow +\infty$. Se, per fissare le idee r_k è un punto di massimo, dalla (2.3), nel caso di $n > 1$, si ricava $u(r) < u(r_k)$ per ogni $r > r_k$. Supponiamo ora $n = 1$. Poiché r_{k+1} è un punto di minimo per u, deve essere $f(u(r_{k+1})) < 0$ (Cfr. l'equazione 2.1) e, quindi, $u(r_{k+1}) < \alpha$. Esiste allora $\xi^* \in]\alpha,\beta[$ tale che $F(\xi) = F(\xi^*)$. Allora, poiché u è soluzione del problema

$$\begin{cases} E(v')v'' + f(v) = 0 \\ V'(r_{k+1}) = 0 \quad , \quad v(r_{k+1}) = u(r_{k+1}) \equiv \xi \end{cases}$$

---

[1] A causa dell'unicità delle soluzioni di (P), ogni punto critico di u è, necessariamente, di massimo o di minimo stretto.

u è periodica di periodo

$$(2.7) \qquad p = p(\xi) = 2\int_{\xi}^{\xi^*} \frac{1}{\lambda(F(\xi) - F(t))}\, dt$$

dove $\lambda = \Lambda^{-1}$ e $\Lambda(t) = \int_0^t \rho E(\rho) d\rho$.

Osservazione 2.4. Per il periodo $p = p(\xi)$ vale la relazione

$$\lim_{\xi \to \alpha} p(\xi) = 2\pi / \sqrt{f'(\alpha)}.$$

Inoltre, se, per esempio, $f(t) = -mt^{\varepsilon}$ per $0 < t < \delta$ e $f(t) = m|t-\beta|^{\varepsilon}$ per $|t-\beta| < \delta$, con $0 < \varepsilon < 1$, m e $\delta > 0$, allora

$$(2.8) \qquad \sup_{0 < \xi < \beta} p(\xi) = p^* < +\infty.$$

3. In questo paragrafo proviamo il teorema seguente

Teorema 3.1. Se f verifica (H.1)-(H.4) il problema (*) ha soluzione.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che f verifichi anche le ipotesi dell'Osservazine 2.4. Poniamo

$I_0 = \{\xi \in]0,\gamma[/ \exists R > 0 : u(\xi,r) < u(\xi,R) = 0 \quad \forall r \in [0,R[\}$,

$I_+ = \{\xi \in]0,\gamma[/ \inf u(\xi,\cdot) > 0\}$.

(qui $u(\xi,\cdot)$ indica la soluzione non prolungabile di (P)). Risulta

$I_0 \cap I_+ = \emptyset$. Inoltre $I_+ \neq \emptyset$ per le Proposizioni 2.3 e 2.2, I_0 è aperto per la dipendenza continua dai dati. Ancora dalla Proposizione 2.3 e dal Teorema di dipendenza continua dai dati, segue subito che anche I_+ è aperto. Proviamo che I_0 è $\neq \emptyset$. Per assurdo supponiamo $I_0 = \emptyset$. Allora $u = u(\xi,\cdot)$ è oscillante $\forall \xi \in]0,\gamma[$. D'altra parte, poiché $v \equiv \gamma$ è soluzione di (2.1), per ogni fissato $\bar{R} > 0$ si può determinare $\delta > 0$ tale che $u'(\xi,r) < 0$ $\forall r \in [0,\bar{R}]$ e $\forall \xi \in]\gamma-\delta, \gamma[$. Poiché u è oscillante, esiste $R > \bar{R}$: $u'(R) = 0$. Possiamo supporre che R sia il primo zero di u'. Quindi R è un punto di minimo forte per u ed allora $f(u(r))<0$ e $u(R) = \eta \in]0,\alpha[$.

Sia ora v la soluzione (periodica) del problema

$$(3.1) \qquad \begin{cases} E(v')v'' + f(v) = 0 \\ v(0) = \eta \ , \ v'(0) = 0 \end{cases}$$

Se $p = p(\eta)$ è il periodo di v , per l'osservazione 2.4 risulta $\sup p \leq p^* < +\infty$. Non è restrittivo supporre $2p^* < \bar{R}$.

Posto $w(r) = u(\xi, r + R)$, $r \geq -2p^*$, risulta

$$(3.1') \qquad \begin{cases} E(w')w'' + \frac{n-1}{\rho+R} A(w')w' + f(w) = 0 \\ w(0) = \eta \quad , \quad w'(0) = 0 \end{cases}$$

Per i teoremi di dipendenza continua dall'equazione, poiché v è periodica di periodo $p \leq p^*$, se $\bar{R}$ è sufficientemente grande (dipendente solo da p^*), allora w' (al pari di v') deve avere uno zero in un punto $-\rho \in]-p^*,0[$. Di conseguenza $u'(R-\rho) = 0$. Ciò contraddice la scelta di R e prova che I_0 è $\neq \emptyset$.

Allora $\exists \xi_0 \in]0,\gamma[: \xi_0 \notin I_0 \cup I_+$. La funzione $u = u(\xi_0,\cdot)$ è

soluzione di (*) (Cfr. Proposizione 2.3).

Il Teorema è provato se f verifica anche le ipotesi dell'Osservazione 2.4. In generale, una funzione f verificante (H.1)-(H.4), può essere approssimata uniformemente mediante una successione di funzioni (f_j) verificanti le ipotesi suddette. Sia $u_j = u(\xi_j,\cdot)$ una soluzione di (*) relativa ad f_j. Possiamo supporre $\xi_j \to \xi^* \in [\beta,\gamma]$ e, di conseguenza, $u_j \to u \in C^2([0,+\infty[,\mathbf{R})$, u soluzione di (2.1). Poiché u_j è monotona decrescente anche u lo è. In particolare u non è oscillante.

Si ha poi $u \geq 0$ e $u \not\equiv 0$. Allora $u > 0$ (se fosse $u(r) = 0$ per un $r > 0$ sarebbe anche $u'(r) = 0$ e, quindi, $u \equiv 0$). Allora u è soluzione di (*) se è $u \not\equiv \gamma$ cioè se $\xi_j \not\to \gamma$. Per assurdo supponiamo $\xi_j \to \gamma$.

Allora, per ogni $R > 0$,

$$F(u_j(o)) = F(\xi_j) = \int_0^{+\infty} A(u_j')u_j'^2 \frac{d\rho}{\rho} \leq$$

$$\leq \int_0^R |u_j'| \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{R} \int_R^{+\infty} (-u'(\rho))d\rho \leq$$

$$\leq \sup_{[0,R]} |u_j''| \, R + \frac{u_j(R)}{R} \leq \sup_{[0,R]} |u_j'| R + \gamma/R \to \gamma/R \text{ per } j \to +\infty.$$

Ciò, data l'arbitrarietà di R, è assurdo in quanto $F(\xi_j) \to F(\gamma) > 0$.

4. In questo numero mostreremo il seguente teorema di unicità

<u>Teorema 4.1.</u> Se f verifica (H.1), se $n \geq \frac{3}{2}$ e se

(H'.1) $\inf\{u > 0/f(u) > 0\} = \alpha > 0$,

(H".1) $f \searrow$ su $\{u > \beta/f(u) > 0\}$,

allora (*) ha al più una soluzione.

Dimostrazione. Siano u e v due soluzioni di (*). Indicheremo con r ed s rispettivamente le funzioni inverse di u e di v. Seguendo [PS] mostreremo le affermazioni seguenti:

A) Se $u > \sigma$ in $]R, +\infty[$ la funzione r-s è positiva e strettamente decrescente su $]v(R), 0[$.

B) Se, per un $R > 0$ riesce $u(R) = v(R) = U$, allora $U > \beta$.

C) Se, per un $R > 0$ riesce $u(R) = v(R) = U$ allora $U \leq \beta$.

Osserviamo che da A), B) e C) segue subito l'unicità. Infatti se $u \neq v$ i grafici di u e di v non possono intersecarsi (a causa di B) e di C)). Sia, per fissare le idee, $u > v$ in $[0,+\infty[$. Allora, per A), r-s è positiva e strettamente decrescente su $]v(o), 0[$. Ciò è assurdo perché $\lim_{u \to v(o)+} (r(u) - s(u))' = +\infty$.

La prova di A) e di C) si fonda sulle proprietà delle soluzioni di (*) mostrate nel § 2; essa non si discosta troppo dalle corrispondenti dimostrazioni relative al caso del laplaciano contenute in [PS]. La dimostrazione di B) richiede invece un procedimento nuovo.

Denotiamo con $l(t,p)$ la funzione positiva definita implicitamente dall'equazione

$$\int_1^p \rho E(\rho)d\rho + F(t) = 0$$

sull'aperto

$$\Omega = \{(t,p)/0 < t < \beta,\ p>0,\ \int_0^p \rho E(\rho)d\rho + F(t) > 0\}.$$

Poniamo inoltre

$$K(t,p) = 2(n-1)\ A(1)\ \{p^2A(p) - 1^2A(1)\}$$

Ragioniamo ora per assurdo e supponiamo $u(R) = v(R) = U \leqq \beta$. Vale allora la seguente identità:

$$R^{2(n-1)}L^2A^2(L) - \lambda^2 = \int_0^U r^{2n-3}K(n,p)\ \frac{du}{p} \tag{4.1}$$

dove $r = r(u)$ e $p = |u'(r(u))|$. Inoltre

$$L = \lim_{r\to R}\ 1(u(r),\ |u'(r)|) \equiv \lim_{r\to R}\ 1(r) \in]0,\ |u'(R)|]\ ,$$

$$\lambda = \lim_{r\to +\infty}\ r^{(n-1)/2}\ 1(r)A(1(r)) \in [0,\ +\infty[\ .$$

La (4.1) si ottiene integrando su $]R,\ +\infty[$ la

$$\frac{d}{dr}\,(r^{n-1}1(r)A(1(r)))^2$$

e, successivamente, eseguendo il cambiamento di variabile $u(r) = u$ nell'integrale.

Ovviamente, una formula analoga alla (4.1) vale anche per v.

Se indichiamo con M, μ e q le quantità relative a v e corrispondenti a L, λ e p rispettivamente, si ha allora:

$$R^{2(n-1)}\{L^2A^2(L) - M^2A^2(M)\} - (\lambda^2-\mu^2) =$$

$$= \int_0^U (r^{2n-3} \frac{K(unp)}{p} - s^{2n-3} \frac{K(u,q)}{q})du.$$

Ora, come nel caso (A), si può provare che u e v si intersecano al più in un numero finito di punti. Non è pertanto restrittivo supporre, ad esempio, $u(r) > v(r)$ $\forall r > R$. Ne viene allora $v'(R) > u'(R)$ (per il teorema di unicità) e, di conseguenza, $L < M$. Inoltre $\lambda \geq \mu$. Allora, poiché $t \to t\,A(t)$ è strettamente crescente, il primo membro di (4.2) è < 0. D'altra parte

$$r^{2n-3} \frac{K(u,p)}{p} - s^{2n-3} \frac{K(u,q)}{q} = \{r^{2n-3} - s^{2n-3}\} \frac{K(u,p)}{p} +$$

$$+ s^{2n-3}\{ \frac{K(u,p)}{p} - \frac{K(u,q)}{q} \}$$

Ora, una verifica diretta prova che è $K \geq 0$ e $\frac{\partial}{\partial\tau} (K(t,\tau)/\tau) \leq 0$. D'altra parte per A),

$r^{2n-3} - s^{2n-3} \geq 0$ $(n \geq \frac{3}{2})$ e $p-q = |\frac{1}{r'}|-|\frac{1}{s'}| \leq 0.$

Ne viene allora che il secondo membro di (4.2) è ≥ 0, mentre, per quanto detto sopra, il primo membro è < 0. Questa contraddizione prova B).

5. In questo paragrafo proviamo che ogni soluzione di (M) è radialmente simmetrica rispetto ad un punto di R^n, purché f verifichi l'ipotesi

(S) $\qquad f(t) = t + g(t)$ con $g(o) = g'(o) = 0$, $g \in C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

La dimostrazione può essere ricondotta a quella del Teorema 2 di [GNN] procedendo nel modo seguente.

A) Per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ riesce $u(x) = O(e^{-\varepsilon|x|})$ per $x \to \infty$.

Questa affermazione si può provare applicando i teoremi di confronto relativi alle equazioni ellittiche quasi-lineari alle funzioni u e

$$V_\lambda(x) = \lambda\, e^{-\varepsilon|x|} \quad , \quad \lambda > 0 \text{ opportuno.}$$

B) Risulta $u(x)$, $Du(x) = O(|x|^{(1-n)/2}\, e^{-|x|})$ per $x \to \infty$.

Infatti, grazie alle stime a priori del gradiente di [LU], riesce $\sup\limits_{R^n} |Du| = C^* < +\infty$.

Di conseguenza (Cfr. [GT], Teorema 12.1)

$$\sup_{x \neq y} \frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|^\sigma} \equiv [Du]_{\sigma,S(x,1)} \leq C_1$$

per ogni $x \in R^n$. Qui C_1 e σ dipendono solo da $\sup u$ e da C^*. Allora u verifica l'equazione ellittica lineare

$$(5.1) \qquad Lu = \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_{ij} u - (1-b)u = 0$$

con

$$a_{ij} = (1+|Du|^2)^{-1/2}(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|Du|^2})$$

e

$$b(x) = \frac{g(u(x))}{u(x)} = \int_0^1 g'(su(x))ds \ ;$$

per quanto già detto e per l'ipotesi (S) i coefficienti a_{ij} e b hanno norme hölderiane, su una qualunque sfera $S(x,1)$, dipendenti solo da sup u e da C*. Per le classiche stime a priori di Schauder si ha pertanto

$$\sup_{S(x,\frac{1}{2})} |Du| + \sup_{S(x,\frac{1}{2})} |D^2 u| \leq C_3 \sup_{S(x,1)} u =$$

$$= O(e^{-\varepsilon|x|}) \qquad \forall \varepsilon \in]0,1[$$

Allora, per la (5.1), $(-\Delta)u + u = h$ con $h(x) = O(e^{-(\alpha+1)|x|})$. Scegliendo $\varepsilon < 1$ tale che $(\alpha + 1)\varepsilon > 1$, l'affermazione B) segue dalla formula di rappresentazione

$$(5.2) \qquad u(x) = \int_{R^n} G(x-y)h(y)dy$$

dove G è la funzione di Green di $(-\Delta +1)$ in R^n:

$$(5.3) \qquad G(x) = F^{-1}_{\xi \to x}((1+|\xi|^2)^{-1}).$$

C) Se indichiamo con x^λ_γ il simmetrico del punto x rispetto all'iperpiano

$$T^\lambda_\gamma = \{x\cdot\gamma = \lambda\} \quad , \quad \gamma \in R^n, \ |\gamma| = 1,$$

e se poniamo

$$u_\gamma^\lambda(x) = u(x_\gamma^\lambda) ,$$

risulta (Cfr. (5.1))

$$(Lu_\gamma^\lambda)(x) = (Lu)(x_\gamma^\lambda).$$

La verifica è immediata.

Questa proprietà dell'operatore L e la formula di rappresentazione (5.3), permettono di provare la simmetria radiale di u rispetto ad un opportuno punto x_0, procedendo esattamente come sulla prova del Teorema 2 di [GNN].

BIBLIOGRAFIA

[BLP] M. BERESTYCKI, P.L. LIONS, L.A. PELETIER - An O.D.E. approach to the existence of positive solutions for semilinear problem in R^n, Indiana Univ. Math. J. Vol. 30 n. 1 (1981) 141-157.

[GNN] B. GIDAS, W.M.NI, L. NIRENBERG, Symmetry of positive solutions of non linear elliptic equations in R^n, Mathematical Analysis and Applications, Advances in Math. Part A-L. Nachin Editor, Academic Press (1981) 369-402.

[L] E. LANCONELLI, Esistenza, unicità e simmetria radiale delle soluzioni positive di equazioni di Poisson semilineari, Seminario di Analisi Matematica, Univ. di Bologna (1983/84).

[LU] O.A. LADYZENSKAJA, N.N. URAL'TSEVA , Local estimates for gradient of solutions of non uniformly elliptic and parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 23, 1970, 677-703.

[PS] L.A. PELETIER, J. SERRIN, Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in R^n, Arch. Rat. Mech. Analysis 81 (1983) 181-197.

[GT] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Springer-Verlag (1977).